数　学　II

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔１〕　関数$f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$を考える。

(1)　$f(0) = \boxed{\text{アイ}}$，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$である。

(2)　２倍角の公式を用いて計算すると，$\cos^2\theta = \dfrac{\cos 2\theta + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$となる。さらに，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$を用いて$f(\theta)$を表すと

$$f(\theta) = \boxed{\text{キ}}\sin 2\theta - \boxed{\text{ク}}\cos 2\theta + \boxed{\text{ケ}} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

（数学II第１問は次ページに続く。）

(3) θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。

三角関数の合成を用いると，① は

$$f(\theta) = \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right) + \boxed{\text{ケ}}$$

と変形できる。したがって，$m = \boxed{\text{ス}}$ である。

また，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において，$f(\theta) = \boxed{\text{ス}}$ となる θ の値は，小さい順に，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

〔2〕 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2) - 2\log_4(y+3) = -1 & \cdots\cdots ② \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を満たす実数 x，y を求めよう。

真数の条件により，x，y のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{タ}}$ である。$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

⓪ $x>0$，$y>0$　① $x>2$，$y>3$　② $x>-2$，$y>-3$

③ $x<0$，$y<0$　④ $x<2$，$y<3$　⑤ $x<-2$，$y<-3$

底の変換公式により

$$\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。よって，② から

$$y = \boxed{\text{ツ}}\,x + \boxed{\text{テ}} \qquad \cdots\cdots ④$$

が得られる。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

次に，$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおき，④を用いて③を t の方程式に書き直すと

$$t^2-\boxed{\text{トナ}}\,t+\boxed{\text{ニヌ}}=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

が得られる。また，x が $\boxed{\text{タ}}$ における x の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ネ}}<t<\boxed{\text{ノ}} \quad \cdots\cdots⑥$$

である。

⑥の範囲で方程式⑤を解くと，$t=\boxed{\text{ハ}}$ となる。したがって，連立方程式②，③を満たす実数 x，y の値は

$$x=\log_3\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}},\quad y=\log_3\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$

であることがわかる。

第2問 （配点　30）

p，q を実数とし，関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ は $x = -1$ で極値 2 をとるとする。また，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C，放物線 $y = -kx^2$ を D，放物線 D 上の点 $(a,\ -ka^2)$ を A とする。ただし，$k > 0$，$a > 0$ である。

(1)　関数 $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるので，$f'(-1) = \boxed{ア}$ である。これと $f(-1) = 2$ より，$p = \boxed{イ}$，$q = \boxed{ウエ}$ である。よって，$f(x)$ は $x = \boxed{オ}$ で極小値 $\boxed{カキ}$ をとる。

(2)　点 A における放物線 D の接線を ℓ とする。D と ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積 S を a と k を用いて表そう。

ℓ の方程式は

$$y = \boxed{クケ}\,kax + ka^{\boxed{コ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表せる。ℓ と x 軸の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ であり，D と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{k}{\boxed{ス}}a^{\boxed{セ}}$ である。よって，

$S = \dfrac{k}{\boxed{ソタ}}a^{\boxed{セ}}$ である。

（数学Ⅱ第2問は次ページに続く。）

(3) さらに，点Aが曲線 C 上にあり，かつ(2)の接線 ℓ が C にも接するとする。このときの(2)の S の値を求めよう。

Aが C 上にあるので，$k = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} - \boxed{\text{テ}}$ である。

ℓ と C の接点の x 座標を b とすると，ℓ の方程式は b を用いて

$$y = \boxed{\text{ト}}\left(b^2 - \boxed{\text{ナ}}\right)x - \boxed{\text{ニ}}\,b^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と表される。② の右辺を $g(x)$ とおくと

$$f(x) - g(x) = \left(x - \boxed{\text{ヌ}}\right)^2\left(x + \boxed{\text{ネ}}\,b\right)$$

と因数分解されるので，$a = -\boxed{\text{ネ}}\,b$ となる。① と ② の表す直線の傾きを比較することにより，$a^2 = \dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

したがって，求める S の値は $\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である。

第３問 （配点　20）

座標平面上に２点 A(－４，－１)，B(２，２)がある。

(1)　２点 A，B を通る直線の方程式は $x - \boxed{\text{ア}}y + \boxed{\text{イ}} = 0$ である。

(2)　線分 AB を２：１に内分する点の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ で，線分 AB を２：１に外分する点の座標は $\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ である。

(3)　２点 A，B からの距離の比が２：１である点 P の軌跡を求めよう。
P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$(x+4)^2 + (y+1)^2 = \boxed{\text{キ}}\,\{(x-2)^2 + (y-2)^2\}$$

である。この式を整理すると

$$x^2 + y^2 - \boxed{\text{ク}}x - \boxed{\text{ケ}}y + \boxed{\text{コ}} = 0$$

となる。よって，求める軌跡は，中心が点 $\left(\boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$，半径が $\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ の円である。この円を C とする。

（数学Ⅱ第３問は次ページに続く。）

(4) (3)で求めた円 C と y 軸との交点の座標は$\left(0,\ \boxed{\text{ソ}}\right)$, $\left(0,\ \boxed{\text{タ}}\right)$ である。ただし, $\boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{タ}}$ とする。

点$\left(0,\ \boxed{\text{ソ}}\right)$, $\left(0,\ \boxed{\text{タ}}\right)$における C の接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とする。ℓ_1 の方程式は $y = \boxed{\text{チツ}}\,x + \boxed{\text{テ}}$ であり, ℓ_2 の方程式は $y = \boxed{\text{ト}}\,x + \boxed{\text{ナ}}$ である。したがって, y 軸と2直線 ℓ_1, ℓ_2 で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ニ}}$ である。

第4問 (配点 20)

4次の整式 $P(x)$ を考える。$P(x)$ の x^4 の係数は1であり，その他の項の係数は実数であるとする。また，4次方程式 $P(x)=0$ は実数解 -1，3をもち，それ以外の実数解をもたないとする。

因数定理により，$P(x)$ は $x+\boxed{\text{ア}}$ と $x-\boxed{\text{イ}}$ で割り切れるから

$$P(x)=\left(x+\boxed{\text{ア}}\right)\left(x-\boxed{\text{イ}}\right)(x^2+ax+b)$$

と表せる。以下，$Q(x)=x^2+ax+b$ とする。

(1) 4次方程式 $P(x)=0$ は，実数解 -1，3の他に，異なる二つの虚数解 α，β をもつとする。このとき，α，β は2次方程式 $Q(x)=0$ の解であるから，解と係数の関係により，$\alpha+\beta=\boxed{\text{ウエ}}$，$\alpha\beta=\boxed{\text{オ}}$ である。また，$Q(x)=0$ の判別式を D とすると，$D=a^{\boxed{\text{カ}}}-\boxed{\text{キ}}\,b$ であり，$\boxed{\text{ク}}$ となる。$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ $D>0$　　① $D=0$　　② $D<0$

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(2)　4次方程式 $P(x)=0$ は虚数解をもたないとする。このとき，$P(x)=0$ は -1，3 のみを解にもつので，$Q(x)$ について，次の三つの場合が考えられる。

$Q(x)=x^2+\boxed{\text{ケ}}x+\boxed{\text{コ}}$ で，$Q(x)$ の値は $\boxed{\text{サ}}$

$Q(x)=x^2-\boxed{\text{シ}}x+\boxed{\text{ス}}$ で，$Q(x)$ の値は $\boxed{\text{セ}}$

$Q(x)=x^2-\boxed{\text{ソ}}x-\boxed{\text{タ}}$ で，$Q(x)$ の値は $\boxed{\text{チ}}$

ただし，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　すべての実数 x で正となる

①　$x=-1$ のとき 0 となり，その他の実数 x で正となる

②　$x=3$ のとき 0 となり，その他の実数 x で正となる

③　$x=-1$ と $x=3$ のとき 0 となり，その他の実数 x で正となる

④　$-1<x<3$ を満たす x で正となり，その他の実数 x で 0 以下となる

⑤　$-1<x<3$ を満たす x で負となり，その他の実数 x で 0 以上となる

(3)　整式 $P(x)$ がすべての実数 x で 0 以上の値をとるとき，因数 $x+\boxed{\text{ア}}$ と $x-\boxed{\text{イ}}$ のとる値の正負を考えると

$$P(x)=x^4-\boxed{\text{ツ}}x^3-\boxed{\text{テ}}x^2+\boxed{\text{トナ}}x+\boxed{\text{ニ}}$$

であることがわかる。

（下 書 き 用 紙）